-EXERCICE 15.3-

• ENONCE :

« Détermination des caractéristiques d'une trajectoire »

- Un satellite de masse m décrit autour de la Terre (masse M) une trajectoire elliptique.
- On a pu mesurer sa vitesse v_A à l'apogée et sa vitesse v_P au périgée.
- On note G la constante universelle de la gravitation.

1) Proposer une méthode de mesure de v_A et v_P.
2) Déterminer , en fonction de G, M, v_A et v_P, les caractéristiques de la trajectoire : excentricité e, paramètre p et période T.

• CORRIGE :

«Détermination des caractéristiques d'une trajectoire »

1) Une méthode par « effet Doppler » convient : une onde électromagnétique de fréquence connue est envoyée sur l'objet en mouvement, s'y réfléchit puis est captée par un récepteur ; la mesure de l'écart de fréquence entre l'onde émise et l'onde reçue permet d'accéder à la vitesse du satellite.

La vitesse est maximum au périgée, et minimum à l'apogée (voir question suivante) : lorsque l'excentricité est faible, les extremums seront déterminés avec une moindre précision.

2) A l'apogée et au périgée, le vecteur vitesse et le rayon vecteur sont perpendiculaires $\Rightarrow$ la constante des aires s'écrit : $C = r_A \times v_A = r_P \times v_P$ (1)

• Par ailleurs, quel que soit le choix de l'axe polaire, on peut écrire :

$r_A = \dfrac{p}{1-e}$ et $r_P = \dfrac{p}{1+e}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{r_A}{r_P} = \dfrac{1+e}{1-e}$ $\Rightarrow$ $e = \dfrac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$ $\Rightarrow$ d'après (1), il vient : $\boxed{e = \dfrac{v_P - v_A}{v_P + v_A}}$

Rq : on a bien $0 \le e \prec 1$, comme il se doit pour une ellipse (si $v_A = v_P$, $e = 0$ $\Rightarrow$ la trajectoire est un cercle).

• Une formule intéressante relie un aspect purement géométrique de la trajectoire (le paramètre p) aux conditions mécaniques initiales (la constante des aires), soit :

$p = \dfrac{C^2}{GM} = \dfrac{(r_A v_A)^2}{GM} = \dfrac{p^2}{(1-e)^2} \times \dfrac{v_A^2}{GM}$ $\Rightarrow$ après calculs : $\boxed{p = \dfrac{4GM}{(v_P + v_A)^2}}$

• Enfin, il est clair que pour accéder à la période, il faut utiliser la 3ème loi de Kepler :

$T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} \times a^3$; or : $2a = r_A + r_P = \dfrac{p}{1-e} + \dfrac{p}{1+e} = \dfrac{2p}{1-e^2}$ $\Rightarrow$ $a = \dfrac{p}{1-e^2}$

On connaît p et e $\Rightarrow$ on peut trouver T : $\boxed{T = \dfrac{2\pi GM}{(v_A \times v_P)^{3/2}}}$